

0 belkach stalowych niewrażliwych na zwichrzenie

Dr inż. Krzysztof Kuchta, dr inż. Izabela Tylek, Politechnika Krakowska

1. Wprowadzenie

Stosunkowo wysoka granica plastyczności stali umożliwia kształtowanie konstrukcji o relatywnie niewielkich grubościach ścianek i gabarytach przekroju poprzecznego. Zaleta ta jest jednocześnie wadą – duże smukłości mogą być przyczyną występowania zjawisk niestateczności, które sprawiają, że stan graniczny nośności jest osiągany przy naprężeniach mniejszych od granicy plastyczności stali.

Nośność belek zginanych jest efektem interakcji trzech zjawisk fizycznych: plastyczności, niestateczności i naprężeń rezydualnych. Zależność nośności belki od jej smukłości względnej przy zwichrzeniu $\bar{\lambda}_{LT}$ (1) pokazano w sposób schematyczny na rysunku 1.

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}}, \quad (1)$$

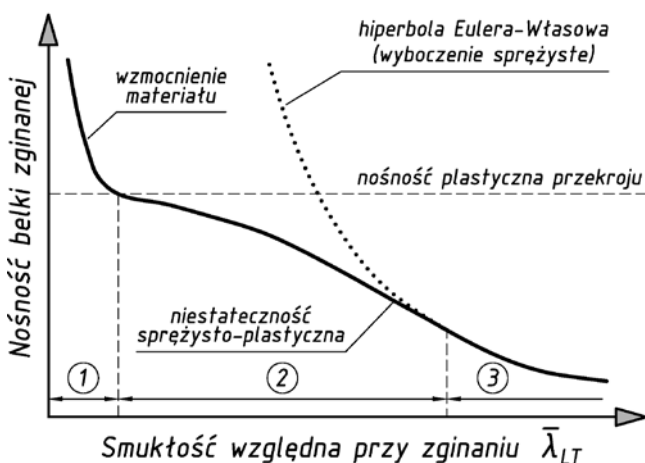
gdzie:

W_y – wskaźnik wytrzymałości przekroju przy zginaniu,

f_y – granica plastyczności stali,

M_{cr} – moment krytyczny przy zwichrzeniu sprężystym.

Na poniższym wykresie można wyróżnić trzy charakterystyczne przedziały. Przy dużych smukłościach nośność belki jest praktycznie równa nośności wyznaczonej na podstawie bifurkacyjnej analizy stateczności geometrycznie idealnego



Rys. 1. Nośność belki na zwichrzenie w funkcji smukłości względnej przy zginaniu $\bar{\lambda}_{LT}$, oznaczono przedziały smukłości: 1 – małych, 2 – średnich, 3 – dużych

elementu zginanego, którego materiał ma charakterystykę idealnie sprężystą. W przedziale średnich smukłości nośność belki może być wielokrotnie mniejsza od nośności wynikającej z analizy bifurkacyjnej. Mniejsza smukłość względna $\bar{\lambda}_{LT}$ sprawia także, że belka jest bardziej wrażliwa na imperfekcje. Dodatkowo w zakresie tym nasila się także interakcja efektów częściowego uplastycznienia materiału, niestateczności sprężystej pręta i wpływu naprężeń rezydualnych, powstałych na skutek technologii wytwarzania i montażu elementu. W przedziale małych smukłości o nośności decyduje w głównej mierze plastyczność materiału i naprężenia rezydualne, przy czym odkształcenia są na tyle duże, że materiał przechodzi w fazę wzmocnienia. Zjawisko to sprawia, że nośność belek o małej smukłości może być większa od nośności plastycznej przekroju zginanego. Największą smukłość prętową, przy której nośność belki jest nie mniejsza od nośności plastycznej przekroju przy zginaniu można określić terminem smukłości progowej $\bar{\lambda}_{LT,0}$ (por. [8]). Wprowadzenie tego terminu pozwala na zdefiniowanie pojęcia belki niewrażliwej na zwichrzenie jako belki o względnej smukłości prętowej $\bar{\lambda}_{LT}$ mniejszej od smukłości progowej $\bar{\lambda}_{LT,0}$.

Belki zginane współtworzące stalowe konstrukcje szkieletowe zwykle nie są odizolowane od innych elementów układu konstrukcyjnego. Płatwie, płyty stropowe, pokrycia dachowe i ścienne oraz inne elementy szkieletu ograniczają swobodę deformacji belki, zmniejszając jednocześnie smukłość belki zginanej. Dodatkowymi czynnikami mającymi wpływ na zwichrzenie belek są: sztywności połączeń belek zginanych z elementami drugorzędnymi, sztywności zamocowania w punktach podparcia belek oraz zastosowane uźebrowanie, a w szczególności sztywności blach czołowych i żeber o przekrojach zamkniętych. Wszystkie powyższe elementy współtworzą paletę możliwości, którą projektant powinien świadomie wykorzystać, kształtując układ statyczny i przekrój belki zginanej.

We wstępnej fazie projektowania konstrukcji rozpatruje się koncepcje alternatywne, poszukując rozwiązania optymalnego z punktu widzenia bezpieczeństwa, efektywności ekonomicznej i oczekiwanej przez inwestora funkcjonalności. Duża liczba możliwych rozwiązań oraz zwykle krótki czas wykonania projektu koncepcyjnego sprawia, że obliczenia wstępne wykonywane są zazwyczaj w sposób przybliżony, z wykorzystaniem założeń upraszczających i doświadczenia projektanta w realizacji podobnych konstrukcji. Umiejętność szybkiego oszacowania wolnej od zwichrzenia długości belki pomaga w racjonalnym kształtowaniu konstrukcji, skraca czas projektowania oraz umożliwia szybszą weryfikację poprawności obliczeń.

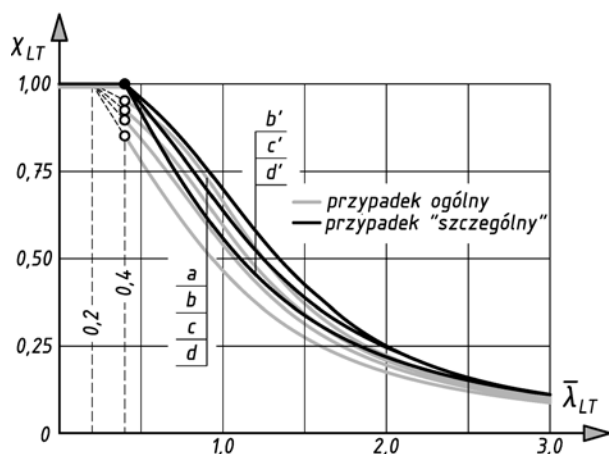
Niniejszy artykuł ma na celu przybliżenie i interpretację normowych zasad wyznaczania długości belek niewrażliwych na zwichrzenie z uwzględnieniem przypadków szczególnych, nie podanych w normie procedur alternatywnych oraz metody szybkiego szacowania za pomocą autorskich nomogramów dla wybranych typoszeręgów profili walcowanych na gorąco.

2. Stateczność belek zginanych w ujęciu normy PN-EN 1993-1-1

Aktualna wersja normy PN-EN 1993-1-1 [8] zawiera trzy metody weryfikacji stateczności zginanych belek stalowych, różniące się ze względu na sposób wyznaczania współczynnika zwichrzenia χ_{LT} . przypadek ogólny – opisany w p. 6.3.2.2, tzw. przypadek „szczególny”, dotyczący belek wykonanych z dwuteowników walcowanych i ich spawanych odpowiedników – opisany w p. 6.3.2.3 oraz uproszczoną ocenę zwichrzenia przedstawioną w p. 6.3.2.4.

Z porównania zapisów normowych – tablice 6.4 i 6.5 [8] – wynika, iż belki wykonane z dwuteowników walcowanych i spawanych o dowolnych proporcjach wymiarów przekroju poprzecznego h/b mogą być wymiarowane zarówno jako przypadek ogólny, jak i przypadek „szczególny”. Brak odpowiedniego komentarza w normie [8] może dawać projektantowi złudną swobodę wyboru metody, podczas gdy przypadek „szczególny” dotyczy dwuteowników walcowanych oraz ich spawanych odpowiedników, tj. blachownic o proporcjach h/b mieszczących się w zakresie od 0,91 (profile HEAA) do 3,33 (profile HEB), natomiast nośność na zwichrzenie blachownic spoza podanego przedziału należy wyznaczać według metody ogólnej. Metodę ogólną należy również stosować w przypadku belek zginanych o dowolnym przekroju, w tym walcowanych, jeśli na swojej długości współpracują one z podatnymi stężeniami punktowymi lub stężeniami ciągłymi np. w postaci pokrycia szkieletu nośnego [1].

Mimo takiego samego oznaczenia przyjętego w normie [8] krzywe zwichrzeniowe $\chi_{LT}(\bar{\lambda}_{LT})$ obydwu metod różnią się od siebie przebiegiem, długością plateau (rys. 2) oraz przyporządkowaniem profili (tabela 1).



Rys. 2. Krzywe zwichrzeniowe przypadku ogólnego i „szczególnego” na podstawie [8]

Tabela 1. Przyporządkowanie krzywych zwichrzeniowych przypadku ogólnego i „szczególnego” na podstawie [8]

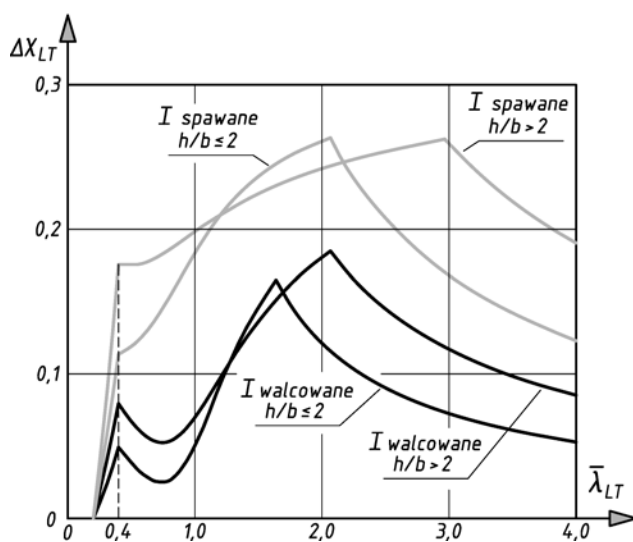
Elementy	Zakres	Krzywa zwichrzeniowa	
		Przypadek ogólny	Przypadek „szczególny”
Dwuteowniki walcowane	$h/b \leq 2$	a	b'
	$h/b > 2$	b	c'
Dwuteowniki spawane	$h/b \leq 2$	c	c'
	$h/b > 2$	d	d'
Inne kształtowniki	brak	d	nie dotyczy

Zastosowanie zaleceń normowych [8] przypadku „szczególnego” daje możliwość oszczędniejszego projektowania konstrukcji, ponieważ wartości współczynników zwichrzeniowych są większe od analogicznych wartości wyznaczanych dla przypadku ogólnego (rys. 3).

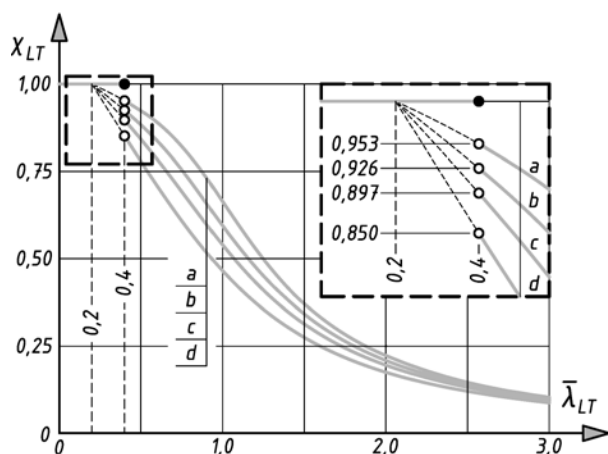
Wartości względnych przyrostów współczynnika zwichrzeniowego zawierają się w zakresach: 3–16% dla dwuteowników walcowanych o $h/b \leq 2$, 5–18% dla dwuteowników walcowanych przy $h/b > 2$, 12–27% dla dwuteowników spawanych przy $h/b \leq 2$ i 18–27% dla dwuteowników spawanych przy $h/b > 2$. Maksymalne przyrosty nośności uzyskuje się jednak dopiero przy stosunkowo dużych smukłościach względnych $\bar{\lambda}_{LT}$, raczej rzadko stosowanych w praktyce projektowej.

W przeciwieństwie do krzywych wybojeniowych i krzywych zwichrzeniowych przypadku ogólnego są funkcjami nieciągłymi przy smukłości $\bar{\lambda}_{LT} = 0,4$ (por. rys. 4), co stwarza możliwość niejednoznacznej interpretacji zaleceń normowych dla smukłości względnych $\bar{\lambda}_{LT}$ z zakresu (0,2–0,4).

Zgodnie z p. 6.3.2.2 (3) normy [8] współczynnik zwichrzeniowy χ_{LT} można wyznaczać na podstawie wykresu funkcji ciągłych – krzywych wybojeniowych $\chi(\bar{\lambda})$ z rys. 6.4 normy [8], które dla smukłości względnych $\bar{\lambda} \in (0,2–0,4)$ przyjmują wartości $\chi < 1,0$. Jednocześnie w punkcie 6.3.2.2 (4) [8] zapisano, że dla smukłości $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4$ warunek stateczności



Rys. 3. Względne przyrosty nośności dla przypadku „szczególnego” według normy [8]



Rys. 4. Krzywe zwichrzeniowe przypadku ogólnego według [8]

belki zginanej sprowadza się do warunku nośności przekroju, co odpowiada przyjęciu w tym zakresie wartości współczynnika zwichrzenia $\chi_{LT} = 1,0$. Wskazana nieciągłość krzywych zwichrzeniowych, skutkująca nagłym, kilkunastoprocentowym przyrostem nośności na skutek nawet infinitesimalnej redukcji smukłości względnej $\bar{\lambda}_{LT}$ nie znajduje uzasadnienia fizycznego.

Uproszczona ocena zwichrzenia belek [8] może być stosowana w przypadku elementów konstrukcji budynków, bez ograniczeń i różnicowania pod względem technologii wykonania profilu, klasy przekroju, proporcji gabarytów przekroju lub jego ścianek składowych. W metodzie tej sprawdzenie warunku nośności belki na zwichrzenie sprowadzone zostało do weryfikacji stateczności zastępczego pasa ściskanego, traktowanego jak wyizolowany pręt ściskany osiowo:

$$\frac{M_{y,Ed}}{k_{fl} \chi M_{c,Rd}} \leq 1, \quad (2)$$

gdzie:

$M_{y,Ed}$ – maksymalna obliczeniowa wartość momentu zginającego względem osi „mocnej”,

$M_{c,Rd}$ – obliczeniowa nośność przekroju przy jednokierunkowym zginaniu,

χ – współczynnik wybożenia zastępczego pasa ściskanego,

k_{fl} – współczynnik modyfikacji uwzględniający przybliżony charakter metody zastępczego pasa ściskanego.

3. Belki konstrukcyjnie zabezpieczone przed zwichrzeniem

W sposób dość powściągliwy zdefiniowano w normie [8] belki konstrukcyjnie zabezpieczone przed zwichrzeniem, wymieniając jedynie trzy takie przypadki: belki o przekroju zamkniętym okrągłym i kwadratowym oraz belki z odpowiednio stężonym pasem ściskany. Na podstawie liniowej teorii stateczności konstrukcji prętowych można wskazać cztery dodatkowe przypadki w których, niezależnie od rozpiętości belki, zwichrzenie

jest niemożliwe, ponieważ moment krytyczny przyjmuje wartość nieskończoną albo staje się liczbą zespoloną, są to:

- belki o przekrojach bisymetrycznych i monosymetrycznych zginane względem osi „słabej”, por. np. [5],
- belki o przekrojach z równymi głównymi centralnymi momentami bezwładności, np. przekrojach krzyżowych lub podwójnie dwuteowych, por. np. [5],
- belki o dwuteowym przekroju bisymetrycznym z obciążonym pasem ściskany i stężeniem ciągłym, wymuszającym położenie środka obrotu przekroju w strefie ściskanej w odległości od środka ciężkości nie mniejszej niż 0,235 wysokości przekroju, por. np. [2],
- belki o dwuteowym przekroju bisymetrycznym z obciążonym pasem rozciągany i stężeniem ciągłym, wymuszającym położenie środka obrotu przekroju w odległości nie mniejszej niż 0,265 wysokości przekroju od skrajnych włókien pasa rozciąganego, por. np. [2].

W przypadku przekrojów zamkniętych prostokątnych za zabezpieczone przed zwichrzeniem można uważać belki, których rozstaw stężeń bocznych l_1 spełnia zależność (3) podaną w wytycznych CIDECT [4]:

$$l_1 \leq \frac{113400}{f_y} \frac{h_0 \psi_m^2}{1 + 3\psi_m} \sqrt{\frac{3 + \psi_m}{1 + \psi_m}}, \quad (3)$$

gdzie:

ψ_m – stosunek gabarytów pola wyznaczonego linią środkową ścianek profilu $\psi_m = b_0/h_0$, przy czym $b_0 < h_0$,

f_y – granica plastyczności stali [N/mm²].

Powyższy wzór jest słuszny jedynie dla profili spełniających warunek $\psi_m \leq 2,5$. Niestety, w pierwszym wydaniu wytycznych CIDECT z 1992 r. [3], udostępnianym obecnie na stronie internetowej www.cidect.org, znajduje się błędna postać wzoru (3), na podstawie której uzyskuje się ponad dwukrotnie zawyżone rozstawy stężeń bocznych l_1 .

Nieważliwe na zwichrzenie, w rozumieniu normy [8] są również belki spełniające przynajmniej jeden z poniższych warunków:

$$\lambda_{LT} \leq \bar{\lambda}_{LT,0}, \quad (4)$$

lub

$$\frac{M_{Ed}}{M_{cr}} \leq \bar{\lambda}_{LT,0}^2. \quad (5)$$

Zakładając $\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$, powyższe formuły można przedstawić w łatwiejszej do interpretacji, jednolitej postaci:

$$M_{cr} \geq 6,25 M_{Rd}, \quad (6)$$

gdzie:

$M_{Rd} = W_{pl,y} f_y$ dla przekrojów klasy 1 i 2 i $M_{Rd} = W_{el,y} f_y$ dla przekrojów klasy 3 i 4

oraz

$$M_{cr} \geq 6,25 M_{Ed}, \quad (7)$$

gdzie:

M_{Ed} – maksymalna obliczeniowa wartość momentu zginającego belkę.

Formuła (6), prowadząca do ostrożnego oszacowania długości belki wolnej od zwichrzenia, jest szczególnie pomocna w fazie wstępnego kształtowania konstrukcji, kiedy nie dysponuje się jeszcze wynikami obliczeń statycznych lub w początkowej fazie projektowania, gdy możliwa jest może niewielka zmiana obciążeń konstrukcji lub sztywności niektórych prętów, prowadząca do ilościowych zmian w rozkładzie momentów zginających. Zależność (7) jest natomiast przydatna podczas zasadniczego wymiarowania konstrukcji lub w obliczeniach sprawdzających, gdy znane są miarodajne rozkłady i wartości ekstremalne momentów zginających. Jeżeli w rozpatrywanej belce istnieje zapas nośności na zginanie, wynikający np. z konieczności unifikacji przekrojów w konstrukcji lub dyskretnej charakterystyki nośności przekrojów walcowanych na gorąco, to długości wolne od zwichrzenia uzyskiwane na podstawie wzoru (7) są większe od otrzymanych ze wzoru (6).

W przypadku zastosowania metod numerycznych do wyznaczania momentu krytycznego dogodniejsza do stosowania jest przekształcona postać wzoru (5), ponieważ występujący w niej mnożnik 6,25 może być interpretowany jako minimalna wartość mnożnika krytycznego otrzymanego na podstawie liniowej analizy stateczności, przy którym belka może być uważana za niepodatną na zwichrzenie.

Ustanowienie limitu smukłości względnej $\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$ dla normowego [8] przypadku ogólnego weryfikacji stateczności elementów zginanych jest niezgodne z przebiegiem krzywych zwichrzeniowych tej metody, dla których plateau kończy się przy $\bar{\lambda}_{LT} = 0,2$. Zachowanie spójności zaleceń normy [8] wymagałoby zatem konsekwentnego przyjęcia $\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,2$ – analogicznie do normowej procedury wymiarowania prętów osiowo ściskanych. Niekonsekwencja ta staje się jeszcze bardziej widoczna, gdy zalecenia normy PN-EN 1993-1-1 [8], dotyczące długości belek wolnych od zwichrzenia, porówna się z analogicznymi zapisami zawartymi w normie PN-EN 1993-2 [9]. Zgodnie z [9] w przypadku wymiarowania belek mostowych długości wolne od zwichrzenia wyznacza się na podstawie poniższych zależności:

$$\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,2 \quad \text{ i } \quad \frac{M_{Ed}}{M_{cr}} \leq 0,04, \quad (8)$$

lub alternatywnie

$$M_{cr} \geq 25 M_{Rd} \quad \text{ i } \quad M_{cr} \geq 25 M_{Ed}. \quad (9)$$

Porównanie zaleceń norm [8] i [9] prowadzi to do dość nieoczekiwanego, i raczej trudnego do uzasadnienia wniosku, że w przedziale smukłości względnych $\bar{\lambda}_{LT} \in (0,2; 0,4)$ nośność belki na zwichrzenie zależy także od jej przeznaczenia. Podejście takie jest niezgodne z ogólną filozofią projektowania

przedstawioną w normie PN-EN 1990 [7] – smukłość graniczna $\bar{\lambda}_{LT,0}$ nie jest bowiem parametrem różnicującym niezawodność konstrukcji budowlanych w zależności od sposobu jej użytkowania.

Ocenę stateczności belek zginanych można prowadzić w sposób uproszczony według p. 6.3.2.4 normy [8], sprowadzając ich weryfikację do sprawdzenia warunku nośności zastępczego przekroju pasa ściskanego, traktowanego jako wyizolowany pręt ściskany osiowo. W oparciu o przyjęty model obliczeniowy autorzy normy [8] podali odpowiednią formułę obliczeniową umożliwiającą określenie maksymalnego rozstawu stężeń bocznych, przy którym belkę można traktować jako niewrażliwą na zwichrzenie. Jako kryterium oceny wrażliwości belki na zwichrzenie przyjęto smukłość względną zastępczego pasa ściskanego $\bar{\lambda}_f$ na odcinku L_c pomiędzy sąsiednimi stężeniami:

$$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c L_c}{i_{f,z} \lambda_1}, \quad (10)$$

gdzie:

k_c – współczynnik poprawkowy według tablicy 6.6 [8], przytoczonej poniżej jako tabela 2,

$i_{f,z}$ – promień bezwładności pasa zastępczego, składającego się z pasa ściskanego i 1/3 ściskanej części środka, względem osi z-z przekroju (rys. 5),

λ_1 – smukłość porównawcza

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}, \quad (11)$$

gdzie:

$E = 210 \text{ GPa}$ – moduł sprężystości stali.

Zgodnie z metodą uproszczoną belka niewrażliwa na zwichrzenie powinna spełniać warunek:

$$\bar{\lambda}_f \leq \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}}, \quad (12)$$

gdzie:

$\frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}}$ – obliczeniowa nośność przekroju na zginanie,

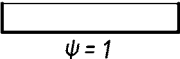
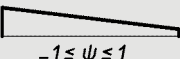
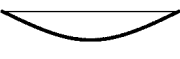
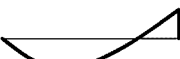
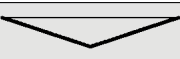
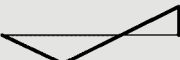
$\bar{\lambda}_{c0}$ – smukłość progowa metody uproszczonej.

Autorzy normy [8] zalecają, aby wartość smukłości progowej $\bar{\lambda}_{c0}$ przyjmować o 0,1 większą od wartości smukłości względnej $\bar{\lambda}_{LT,0}$. Zalecenie to nie zostało jednak wzięte pod uwagę podczas tworzenia polskiego załącznika krajowego NA: 2010 do normy [8], w którym wartość $\bar{\lambda}_{c0}$ ustalono równą 0,4.

Dla najbardziej niekorzystnego przypadku stateczności pasa, tj. obciążenia stałym momentem przy pełnym wykorzystaniu nośności przekroju na zginanie, warunek (12) upraszcza się do postaci:

$$L_c \leq \begin{cases} 37,56 i_{f,z} & \text{dla S 235} \\ 34,72 i_{f,z} & \text{dla S 275} \\ 30,56 i_{f,z} & \text{dla S 355} \end{cases}. \quad (13)$$

Tabela 2. Wartości współczynnika poprawkowego k_c i jego odwrotności na podstawie normy [8]

Rozkład momentów	k_c	$1/k_c$
 $\psi = 1$	1,0	1,0
 $-1 \leq \psi \leq 1$	$1,33-0,33 \psi$	$\frac{1}{1,33-0,33 \psi}$
	0,94	1,064
	0,90	1,111
	0,91	1,099
	0,86	1,163
	0,77	1,299
	0,82	1,220

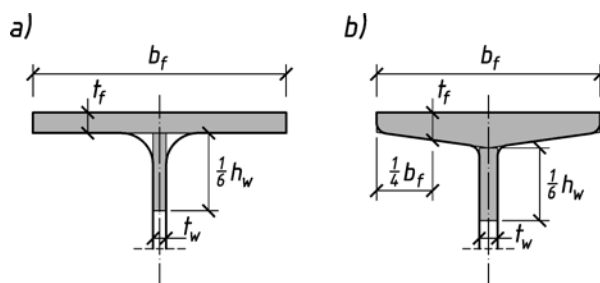
Podobne ograniczenia rozstawu stężeń przeciwwzichrzeniowych zawarte były w wycofanej normie polskiej PN-B-03200:1990 [6]. Przyjmując te same założenia, dla których otrzymano zależność (13), tj. dla $\beta = 1$, normowy wzór (40) [6] można zapisać jako:

$$\lambda_1 \leq \begin{cases} 35,00 i_z & \text{dla St 3} \\ 33,48 i_z & \text{dla St 4} \\ 29,39 i_z & \text{dla 18G2} \end{cases} \quad (14)$$

Maksymalny rozstaw stężeń bocznych, zapewniający brak redukcji nośności przekroju na zginanie był w normie polskiej [6] uzależniony od promienia bezwładności całego przekroju względem osi słabej i_z , a nie od promienia bezwładności pasa zastępczego $i_{f,z}$ jak w przypadku zaleceń europejskich [8]. Można jednak wykazać analitycznie, że w przypadku stosowanych w praktyce inżynierskiej proporcji przekrojów dwuteowych warunek $i_z < i_{f,z}$ będzie zawsze spełniony. W konsekwencji, przy podanych powyżej założeniach, łatwiejsza do stosowania, pochodząca z normy polskiej [6] formuła (14) może być wykorzystywana do bezpiecznego oszacowania długości belek wolnych od zwichrzenia również podczas projektowania konstrukcji na podstawie normy europejskiej [8].

4. Szacowanie długości belek wolnych od zwichrzenia

Zastosowanie przybliżonych metod wyznaczania długości belek wolnych od zwichrzenia pozwala na redukcję pracochłonności obliczeń podczas wstępnego kształtowania konstrukcji



Rys. 5. Przekrój obliczeniowy zastępczego pasa ściskanego: a) profil IPE, b) profil IPN

oraz w trakcie analiz sprawdzających, mających na celu wykrycie tzw. błędów grubych. W niniejszym artykule zaproponowano podejście oparte na graficznej interpretacji zaleceń normowych w postaci przedstawionych na rysunku 6 autorskich nomogramów. Nomogramy zostały sporządzone dla walcowanych na gorąco profili typoszeręgu IPN (rys. 6a) i IPE (rys. 6b), stosowanych zwykle na elementy zginane. Umożliwiają one wyznaczanie granicznych rozstawów stężeń przeciwwzichrzeniowych bez obliczania wartości momentu krytycznego i bez konieczności posługiwania się charakterystykami geometryczno-wytrzymałościowymi profilu. Poszukiwana wartość wyznaczana jest z dokładnością ± 10 cm, którą można uznać za wystarczającą w szacunkowych obliczeniach inżynierskich.

Autorzy artykułu konstrukcję nomogramów oparli na procedurze uproszczonej oceny zwichrzenia belek w budynkach, zamieszczonej w p. 6.3.2.4 normy [8]. Za ich pomocą możliwe jest zatem wyznaczenie długości belek wolnych od zwichrzenia z uwzględnieniem wpływu:

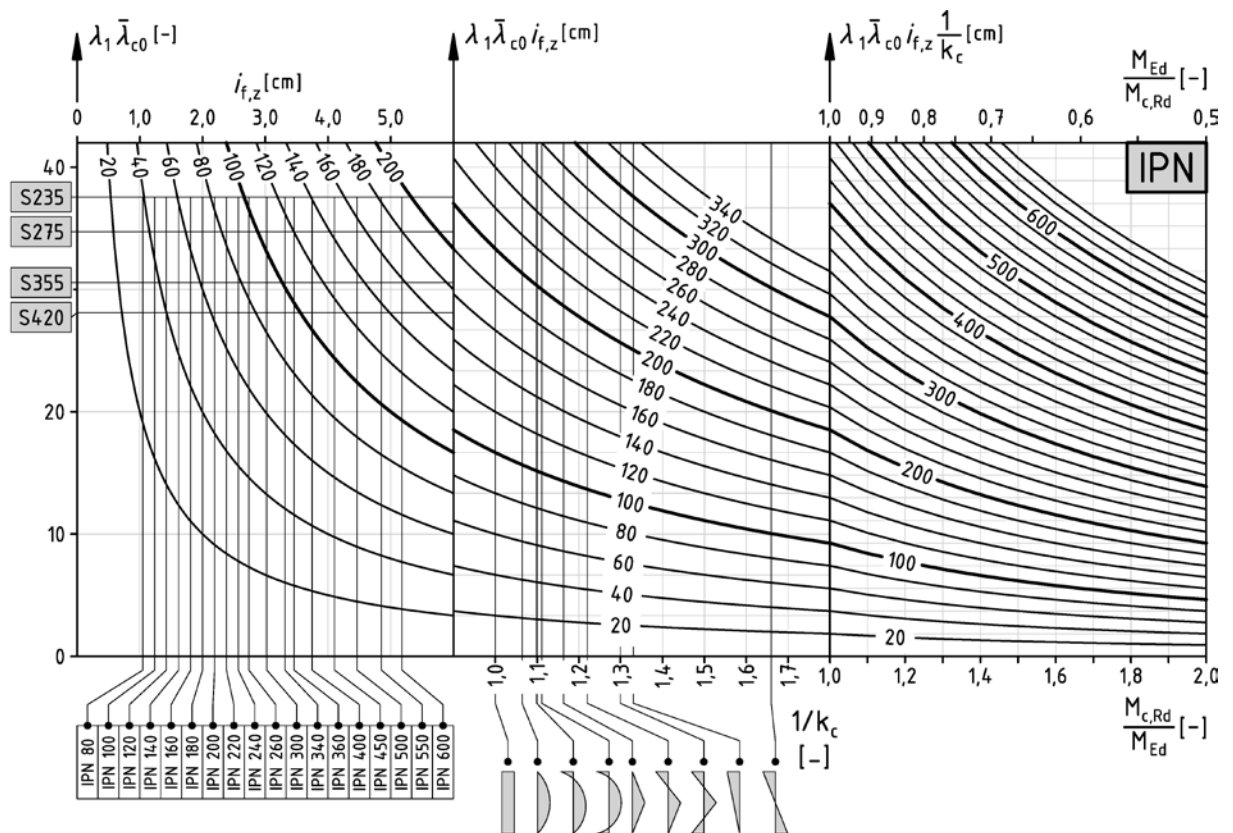
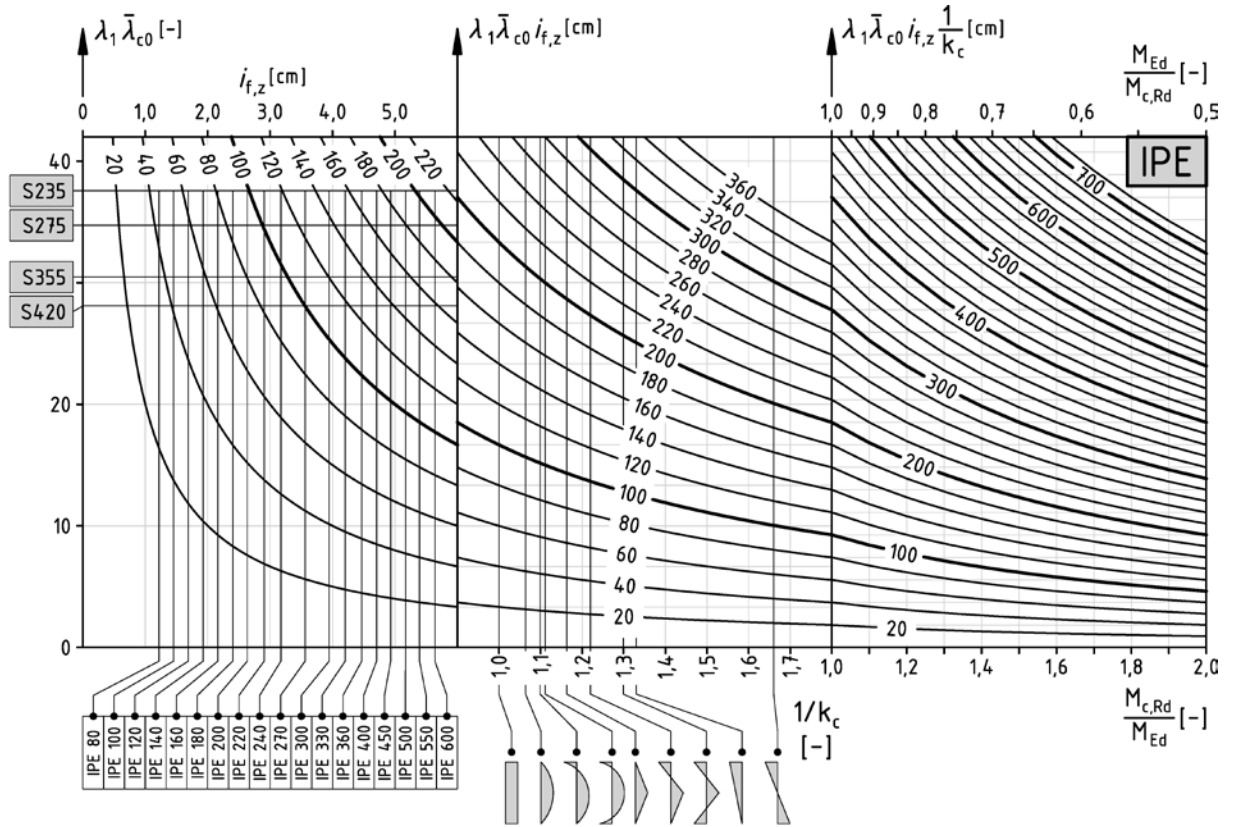
- gatunku stali (S235, S275, S355, S420),
- zmienności rozkładu momentów zginających na długości rozpatrywanego odcinka belki,
- stopnia wykorzystania nośności przekroju M_{Ed}/M_{Rd} .

W celu zwiększenia ergonometrii nomogramów w pierwszej i drugiej sekcji naniesiono linie pomocnicze wskazujące parametry gatunku stali, numeru przekroju oraz odwrotności współczynnika poprawkowego k_c . W praktyce umożliwia to użytkownikowi nomogramów bez konieczności sięgania do tablic przekrojów stalowych lub normy [8].

Przy sporządzaniu nomogramów posłużono się alternatywną, multiplikatywną postacią normowego wzoru (6.59) [8], która w sposób jawny określa maksymalną długość wolną od zwichrzenia:

$$L_c = \lambda_1 \bar{\lambda}_{c0} i_{f,z} \frac{1}{k_c} \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}} \quad (15)$$

Sekcje przedstawionych nomogramów odpowiadają kolejno wpływom trzech wyróżnionych w powyższej formule mnożników iloczynu. W każdej sekcji warstwy umożliwiają bezpośredni odczyt maksymalnej długości belki wolnej od zwichrzenia. Znając gatunek stali oraz numer profilu, użytkownik już w pierwszej sekcji nomogramu może zgrubnie oszacować poszukiwaną wartość, zakładając najbardziej niekorzystny



Rys. 6. Autorskie nomogramy do wyznaczanie długości belek wolnych od zwichrzenia: a) profile IPE, b) profile IPN

przypadek projektowy, tzn. stały rozkład momentu zginającego i pełne wykorzystanie nośności przekroju. W sekcji drugiej uwzględnia się wpływ zmienności momentu zginającego na długości rozpatrywanego odcinka; odczytana stąd wartość odpowiada przypadkowi pełnego wykorzystania nośności przekroju na zginanie. Sekcja trzecia pozwala na wyznaczenie długości belki wolnej od zwichrzenia z uwzględnieniem stopnia wykorzystania nośności w zakresie 0,5–1,0. Procedura stosowania nomogramów jest następująca (por. rys. 8):

- w pierwszej sekcji nomogramu należy znaleźć punkt A na przecięciu linii wybranego profilu i linii gatunku stali, a następnie przenieść go, z zachowaniem proporcji odległości od sąsiednich warstw, na linię graniczną pomiędzy sekcją pierwszą a drugą (punkt B);
- w sekcji drugiej należy znaleźć punkt przecięcia linii poziomej poprowadzonej z punktu B z linią pionową odpowiadającą przyjętej wartości współczynnika $1/k_c$ (punkt C). Analogicznie jak w sekcji pierwszej punkt C należy przenieść na granicę sekcji drugiej i trzeciej (punkt D);
- w ostatniej, trzeciej sekcji nomogramu, należy wyznaczyć punkt przecięcia linii poziomej poprowadzonej z punktu D i linii pionowej odpowiadającej stopniowi wykorzystania nośności przekroju na zginanie (punkt E). Ostateczną wartość maksymalnej długości wolnej od zwichrzenia określa się odczytując położenie punktu E względem warstw sekcji trzeciej.

5. Przykład obliczeniowy

Konstrukcję wsporczą urządzenia technologicznego stanowi belka wolnopodparta o rozpiętości 9,6 m, obciążona dwiema siłami skupionymi P_k przyłożonymi symetrycznie względem środka rozpiętości przęsła (rys. 7a). Belkę zaprojektowano wstępnie z profilu IPE360 ze stali gatunku S235JR, korzystając z warunku sztywności przy ugięciach dopuszczalnych równej $1/350$ rozpiętości belki. W przekrojach podporowych i miejscach przyłożenia obciążeń ukształtowano więzi i stężenia zabezpieczające belkę przed obrotem i przemieszczeniem bocznym. Należy sprawdzić, czy tak zaprojektowana belka jest podatna na zwichrzenie.

Wartość charakterystyczna zmiennego obciążenia skupionego – $P_k = 24$ kN.

Ciężar własny profilu IPE 360 – $g_k = 0,57$ kN/m.

Plastyczny wskaźnik wytrzymałości profilu IPE 360 – $W_{y,pl} = 1019$ cm³.

Granica plastyczności stali S235JR – $f_y = 235$ MPa.

Częściowe współczynniki bezpieczeństwa dla obciążeń – $\gamma_G = 1,35$ i $\gamma_Q = 1,50$.

Wartość obliczeniowa miarodajnego momentu zginającego (rys. 7b):

$$M_{y,Ed} = 1,35 \times (0,5 \times 9,6 \times 0,57 \times 3,6 - 0,57 \times 3,6 \times 0,5 \times 3,6) + 1,50 \times 24 \times 3,6 = 137,9 \text{ kNm}.$$

Wyznaczonemu rozkładowi momentów zginających odpowiadają odwrotności współczynnika poprawkowego k_c równe: 1,0 dla przedziału środkowego (rozkład prostokątny) i 1,33 dla przedziałów skrajnych (rozkład trójkątny) – por. tabela 2.

Obliczeniowa nośność plastyczna przekroju IPE 360 na zginanie:

$$M_{c,Rd} = 1019 \times 235 \times 10^{-3} = 239,5 \text{ kNm}.$$

Stopień wykorzystania nośności na zginanie:

$$M_{y,Ed}/M_{c,Rd} = 0,576 < 1,0.$$

Odwrotność stopnia wykorzystania nośności

$$M_{c,Rd}/M_{y,Ed} = 1,736.$$

Warunek nośności przekroju został spełniony, można zatem przystąpić do sprawdzenia warunku stateczności belki.

Korzystając z nomogramów na rysunku 8 wyznaczono wartości granicznych rozstawów stężeń bocznych $L_{c,max}$. Ścieżka ABCDE służy wyznaczaniu wartości $L_{c,max}$ dla przedziału środkowego belki. Odczytana z nomogramu wartość $L_{c,max} = 290$ cm jest większa od rozstawu stężeń równego 240 cm, zatem belka jest w tym przedziale niewrażliwa na zwichrzenie. Na podstawie ścieżki ABC'D'E' wyznaczono wartość $L_{c,max} = 380$ cm dla przedziału skrajnego. Wartość ta jest większa od rozstawu stężeń równego 360 cm, zatem w tym przedziale belka jest również niewrażliwa na zwichrzenie. W rozpatrywanym przypadku sprawdzenie stateczności belki sprowadza się więc do sprawdzenia warunku nośności przekroju, co zostało wykazane bez konieczności wykonywania obliczeń analitycznych.

Obliczenia sprawdzające przeprowadzono poniżej zgodnie z normą [8] procedurą uproszczonej oceny zwichrzenia.

Współczynnik poprawkowy: $k_c = 1,0$ (przedział środkowy);

$k_c = 1/1,33 = 0,752$ (przedział skrajny) – por. tabela 2.

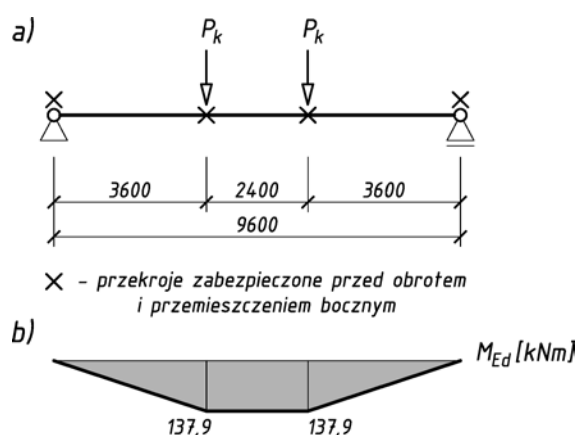
Moduł sprężystości stali $E = 210$ GPa.

Smukłość porównawcza

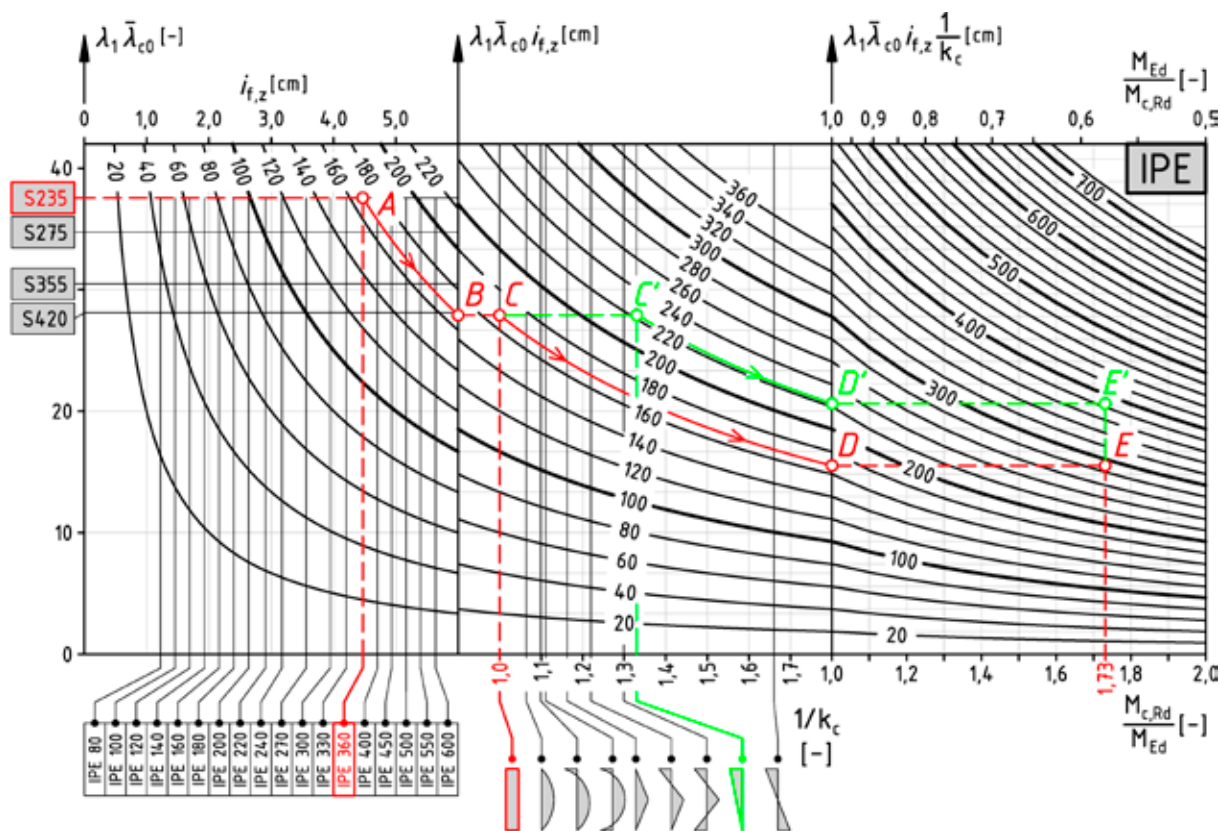
$$\lambda_1 = \pi \sqrt{E / f_y} = \pi \sqrt{210 \times 10^3 / 235} = 93,9.$$

Smukłość progowa metody uproszczonej – $\bar{\lambda}_{c0} = 0,4$ (NA.18 [8]).

Moment bezwładności pasa zastępczego, składającego się z pasa ściskanego i 1/3 ściskanej części środka, względem osi z-z przekroju:



Rys. 7. Schemat statyczny belki (a), wykres momentów zginających (b)



Rys. 8. Przykład wyznaczania długości belki wolnej od zwichrzenia

$$I_{f,z} = \frac{t_f b_f^3}{12} + \frac{1/6 (h - 2t_f) t_w^3}{12} =$$

$$= \frac{1,27 \times 17,0^3}{12} + \frac{1/6 \times (36,0 - 2 \times 1,27) \times 0,8^3}{12} = 520,2 \text{ cm}^3$$

Promień bezwładności pasa zastępczego, składającego się z pasa ściskanego i 1/3 ściskanej części środka, względem osi z-z przekroju:

$$i_{f,z} = \sqrt{\frac{I_{f,z}}{t_f b_f + 1/6 (h - 2t_f) t_w}} =$$

$$= \sqrt{\frac{520,2}{1,27 \times 17,0 + 1/6 \times (36,0 - 2 \times 1,27) \times 0,8}} = 4,469 \text{ cm}$$

Smukłość względna zastępczego pasa ściskanego $\bar{\lambda}_f$ na odcinku L_c pomiędzy sąsiednimi stężeniami:

– przedział środkowy belki

$$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c L_c}{i_{f,z} \lambda_1} = \frac{1,0 \times 240}{4,469 \times 93,9} = 0,572,$$

– przedział skrajny belki

$$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c L_c}{i_{f,z} \lambda_1} = \frac{0,752 \times 240}{4,469 \times 93,9} = 0,430.$$

Sprawdzenie, czy belka jest konstrukcyjnie zabezpieczona przed zwichrzeniem:

– w przedziale środkowym

$$\bar{\lambda}_f = 0,572 < \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{Ed}} = 0,4 \times 1,736 = 0,694,$$

– w przedziale skrajnym

$$\bar{\lambda}_f = 0,430 < \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{Ed}} = 0,4 \times 1,736 = 0,694.$$

Zarówno na odcinku środkowym, jak i skrajnym rozpatrywana belka jest konstrukcyjnie zabezpieczona przed zwichrzeniem, zatem sprawdzenie nośności belki sprowadza się do weryfikacji nośności przekrojowej, co potwierdza poprawność wniosków sformułowanych przy wykorzystaniu nomogramów.

Korzystając ze wzoru (15), można wyznaczyć analitycznie wartość dokładną $L_{c,max}$ – w sensie normowej metody uproszczonej [8] – maksymalnej długości wolnej od zwichrzenia, którą dla odróżnienia oznaczono dodatkowym indeksem dolnym EC:

– przedział środkowy belki

$$L_{c,max,EC} = \lambda_1 \bar{\lambda}_{c0} i_{f,z} \frac{1}{k_c} \frac{M_{c,Rd}}{M_{Ed}} =$$

$$= 93,9 \times 0,4 \times 4,469 \times 1,0 \times 1,736 = 291 \text{ cm}$$

przy czym na podstawie nomogramów otrzymano

$$L_{c,max} = 290 \text{ cm},$$

– przedział środkowy belki

$$L_{c,max,EC} = \lambda_1 \bar{\lambda}_{c0} i_{f,z} \frac{1}{k_c} \frac{M_{c,Rd}}{M_{Ed}} =$$

$$= 93,9 \times 0,4 \times 4,469 \times 1,33 \times 1,736 = 387 \text{ cm},$$

przy czym na podstawie nomogramów otrzymano

$$L_{c,max} = 380 \text{ cm}.$$

W analizowanym przypadku błąd względny wynikający z zastosowania autorskich nomogramów (rys. 8) wynosi zatem poniżej 1% na odcinku środkowym i 2% na odcinku skrajnym belki; wyniki te mieszczą się w deklarowanej dokładności ± 10 cm.

6. Podsumowanie

Zwischen ist stosunkowo już dobrze rozpoznanym zjawiskiem niestateczności ogólnej redukującym nośność zginanych elementów stalowych. Znajomość długości belek wolnych od zwichrzenia pomaga projektantowi konstrukcji stalowych racjonalnie rozmieszczać stężenia przeciwzwichrzeniowe, umożliwiając pełne wykorzystanie nośności przekrojowej belek zginanych. Z punktu widzenia nośności konstrukcji nie ma bowiem uzasadnienia stosowanie stężeń przeciwzwichrzeniowych w rozstawie mniejszym, niż wynika to z warunku uzyskania smukłości progowej $\lambda_{LT,0}$.

W praktyce inżynierskiej spotyka się belki zginane, które są konstrukcyjnie zabezpieczone przed zwichrzeniem lub z punktu widzenia liniowej teorii stateczności ich zwichrzenie jest niemożliwe. W takim przypadku niewrażliwość belki na zwichrzenie można wykazać bez konieczności przeprowadzania obliczeń, poddając ocenie jedynie cechy geometryczne przekroju poprzecznego oraz ewentualnie usytuowanie ciągłych stężeń przeciwzwichrzeniowych, wymuszających położenie chwilowej osi obrotu przekroju. Dla belek o przekroju poprzecznym otwartym albo zamkniętym z niejednakowymi głównymi centralnymi momentami bezwładności możliwość wystąpienia zwichrzenia można ocenić, porównując wartość sprężystego momentu krytycznego M_{cr} z nośnością przekroju na zginanie $M_{c,Rd}$ lub największą, w rozpatrywanym przedziale belki, wartością momentu zginającego M_{Ed} . Belka może być uznana za niewrażliwą na zwichrzenie, jeśli moment krytyczny M_{cr} jest przynajmniej 6,25 razy większy od nośności $M_{c,Rd}$ lub momentu zginającego M_{Ed} . Jako niespójność i brak konsekwencji w strukturze grupy

norm PN-EN 1993 można traktować zalecenie normy [9], aby w przypadku belek mostowych wspomniany wcześniej współczynnik wynosił 25 zamiast 6,25.

Uproszczona normowa metoda oceny wrażliwości belek na zwichrzenie [8] nie wymaga wyznaczania wartości momentu krytycznego M_{cr} , konieczne jest jednak wyznaczenie smukłości zastępczego przekroju pasa ściskanego, która w przeciwieństwie do pozostałych parametrów przekroju poprzecznego nie jest wartością stabilizowaną. Można wykazać, że w przypadku najbardziej niekorzystnego prostokątnego rozkładu momentów zginających obliczanie długości belek wolnych od zwichrzenia na podstawie prostszej formuły zamieszczonej w wycofanej normie polskiej [6] jest oszacowaniem nieco bezpieczniejszym w porównaniu zaleceniami normy europejskiej [8]. Porównując obydwie formuły można również zauważyć, że uwzględnienie w procedurze normy [8] wpływu stopnia wykorzystania nośności przekroju na zginanie może znacznie zwiększyć długość belki wolną od zwichrzenia, przyczyniając się do bardziej ekonomicznego jej zaprojektowania.

Przedstawione w artykule autorskie nomogramy umożliwiają szybkie oszacowanie długości wolnych od zwichrzenia belek typoszeregu IPE i IPN na podstawie normowej uproszczonej oceny zwichrzenia [8]. Nomogramy opracowano z uwzględnieniem ergonomii prowadzenia obliczeń inżynierskich; ich stosowanie nie wymaga prowadzenia dodatkowych działań rachunkowych ani korzystania z tablic profili stalowych. Dokładność uzyskanych wyników jest zdaniem autorów wystarczająca do celów projektowych. Podkreślić również należy, że przejrzysty układ nomogramów z określonymi wyraźnie ekstremalnymi wartościami poszukiwanej wielkości stwarza mniejszą możliwość popełnienia tzw. błędów grubych, które mogą wystąpić podczas wyznaczania długości wolnych od zwichrzenia za pomocą formuły analitycznej.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Boissonnade N., Greiner R., Jaspart J.P., Lindner J., Rules for Member Stability in EN 1993-1-1. Background documentation and design guidelines, ECCS Technical Committee 8 – Stability, Brussels 2006
- [2] Březina V., Stateczność prętów konstrukcji metalowych, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1966
- [3] Rondal J., Würker K.-G., Dutta D., Wardenier J., Yeomans N., Structural Stability of Hollow Sections, Comité International pour le Développement et l'Etude de la Construction Tubulaire, 1st Edition, Verlag TÜV Rheinland GmbH, Köln, 1992
- [4] Rondal J., Würker K.-G., Dutta D., Wardenier J., Yeomans N., Structural Stability of Hollow Sections, Comité International pour le Développement et l'Etude de la Construction Tubulaire, 1st Edition reprinted with corrections, Verlag TÜV Rheinland GmbH, Köln, 1996
- [5] Trahair N. S., Flexural-Torsional Buckling of Structures, E & FN Spon, London, 1993
- [6] PN-B-03200:1990. Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie
- [7] PN-EN 1990:2004. Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji
- [8] PN-EN 1993-1-1:2006. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków
- [9] PN-EN 1993-2:2010. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 2: Mosty stalowe